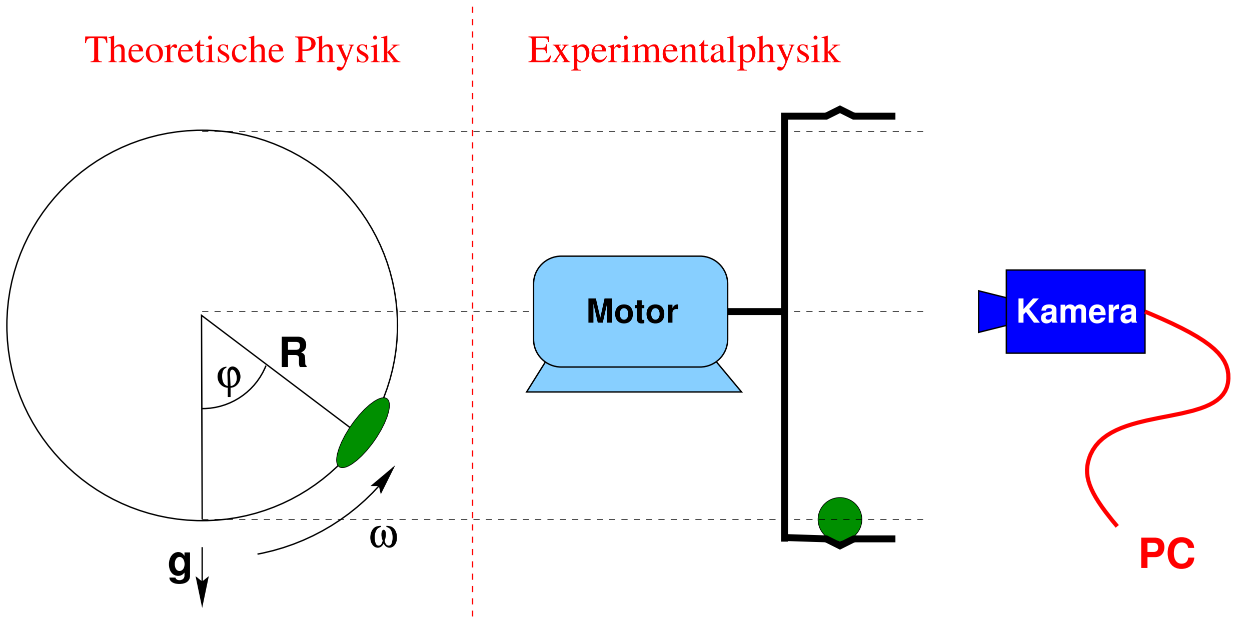
Nichtlineare Schwingungen bei trockener Reibung

Alexander Schinner[1]
Prof. Dr. K. Kassner[1]
André Betat[2]
Prof. Dr. I. Rehberg[2]

[1] Institut für Theoretische Physik
[2] Institut für Experimentelle Physik

Universität Magdeburg



Ungestörtes System

Integration des Systems für $\mu \equiv \text{const}$

$$\dot\varphi^2 = -2\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\frac{1}{1+4\mu_0^2}\cdot\left\{(2\mu_0^2-1)\cos\varphi - 3\mu_0\sin\varphi\right\} + 2e^{2\mu_0\varphi}\cdot \mathrm{c}$$

Auflösen nach c und ableiten

$$\dot{\mathrm{c}} = e^{-2\mu_0\varphi}\dot\varphi\underbrace{\left[\ddot\varphi + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\sin\varphi - \mu_0(\mathrm{g}\cos\varphi + \dot\varphi^2)\right]}_{\equiv 0}$$

Gestörtes System

Störungstheoretischer Ansatz für $\mu(v_{rel}(\mathrm{t}))$:

$$\ddot\varphi(\mathrm{t}) = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\sin\varphi(\mathrm{t}) + \mu_0\cdot\left\{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\cos\varphi(\mathrm{t}) + \dot\varphi^2(\mathrm{t})\right\} + \text{Störung}$$

Die Störung enthält die Geschwindigkeitsabhängigkeit von μ.

Ungestörtes System

Integration des Systems für $\mu \equiv \mathrm{const}$

$$\dot{\varphi}^2 = -2\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\frac{1}{1+4\mu_0^2} \cdot \left\{(2\mu_0^2 - 1)\cos\varphi - 3\mu_0 \sin\varphi\right\} + 2e^{2\mu_0\varphi} \cdot \mathrm{c}$$

Auflösen nach c und ableiten

$$\dot{\mathrm{c}} = e^{-2\mu_0\varphi}\dot{\varphi}\underbrace{\left[\ddot{\varphi} + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\sin\varphi - \mu_0(\mathrm{g}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2)\right]}_{\equiv 0}$$

Gestörtes System

Störungstheoretischer Ansatz für $\mu(v_{rel}(\mathrm{t}))$:

$$\ddot{\varphi}(\mathrm{t}) = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\sin\varphi(\mathrm{t}) + \mu_0 \cdot \left\{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}\cos\varphi(\mathrm{t}) + \dot{\varphi}^2(\mathrm{t})\right\} + \text{Störung}$$

Die Störung enthält die Geschwindigkeitsabhängigkeit von μ.

Averaging Methode

Annahme: Der Störungsterm beeinflußt nur die Integrationskonstante c

$$c = c_0(\tau) + \varepsilon c_1(t, \tau) + \cdots$$

wobei $\tau = \varepsilon t$.

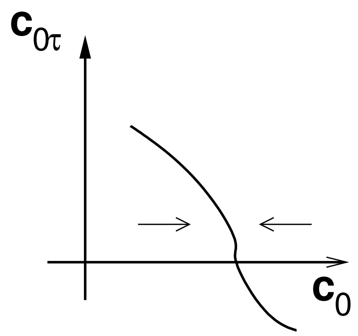
$$\dot{c} = \varepsilon(c_{0\tau}(\tau) + c_{1t}(t, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Nach Integration über eine Periode und Verwendung von ċ aus der ungestörten Lösung

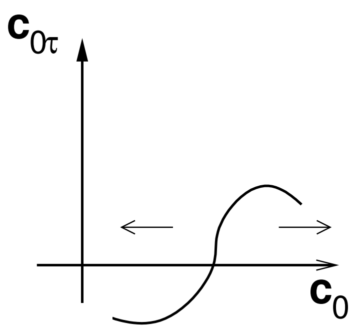
$$\varepsilon c_{0\tau} = -\frac{2}{\mathrm{T}_p} \int_{\varphi^{min}}^{\varphi^{max}} \mathrm{d}\varphi\ \dot{\varphi} e^{-2\mu_0 \varphi} \dot{\varphi} \cdot$$
$$\cdot \varepsilon \left[(\mu(\dot{\varphi}) - \mu_0) \cdot \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}} \cos\varphi + \dot{\varphi}^2 \right) \right]$$

Wenn $c_{0t}(c_0^*) = 0$ dann hat die das System eine periodische Lösung mit der Periode

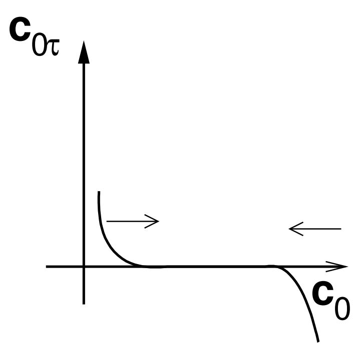
$$T(c_0^*) = 2 \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \mathrm{d}\varphi \, \frac{1}{\dot{\varphi}}$$



stabiler Orbit



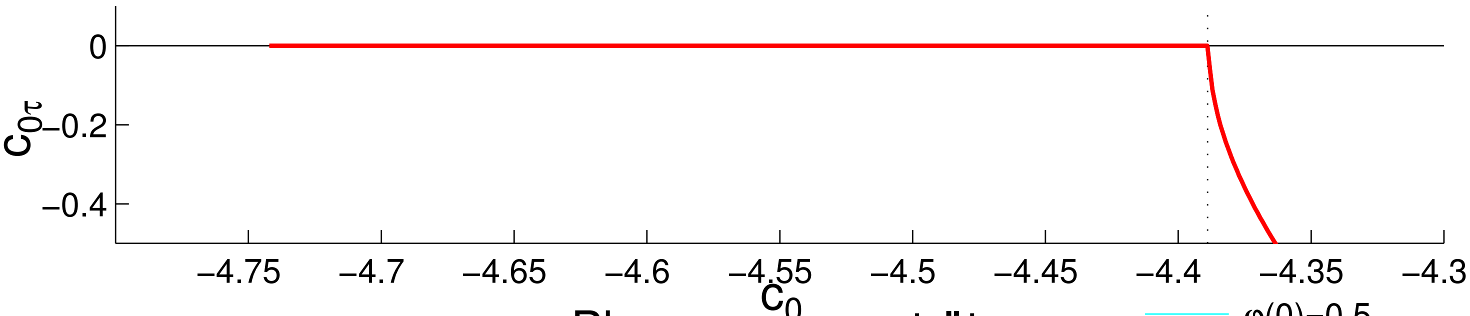
instabiler Orbit

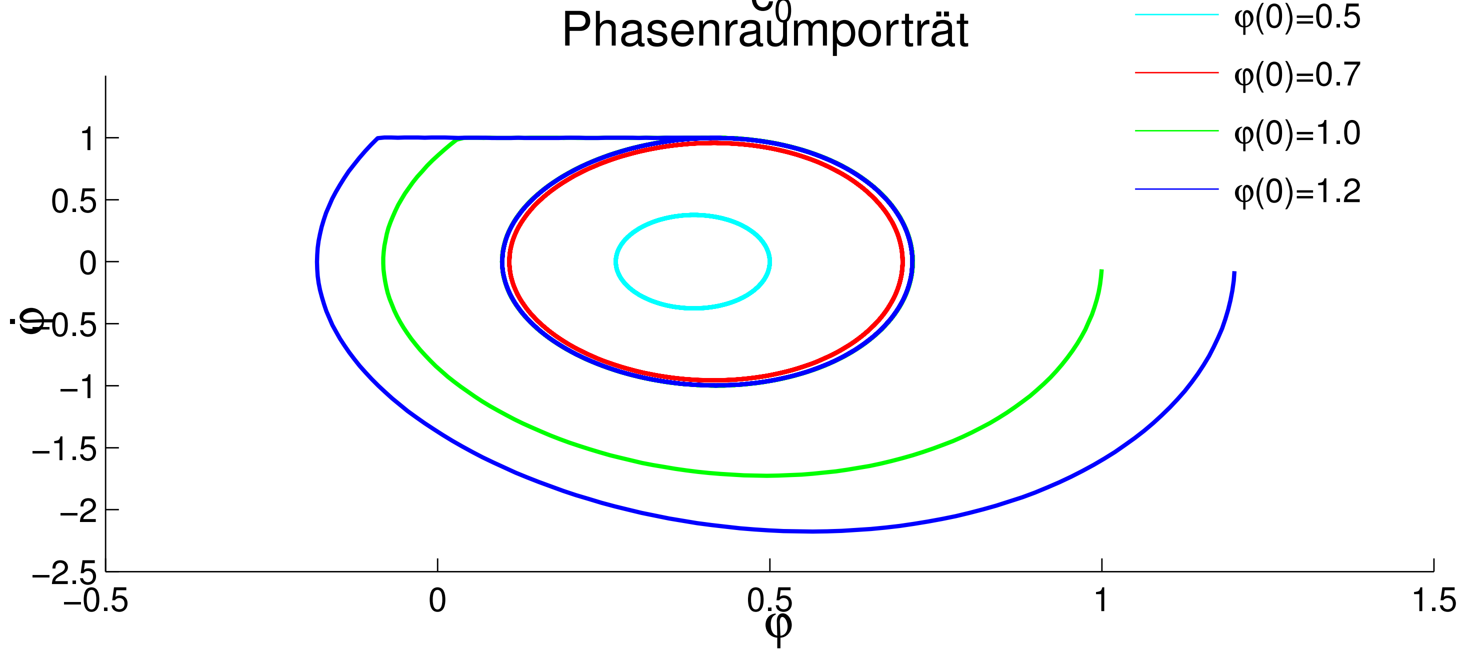


marginal stabiler Orbit

Coulomb

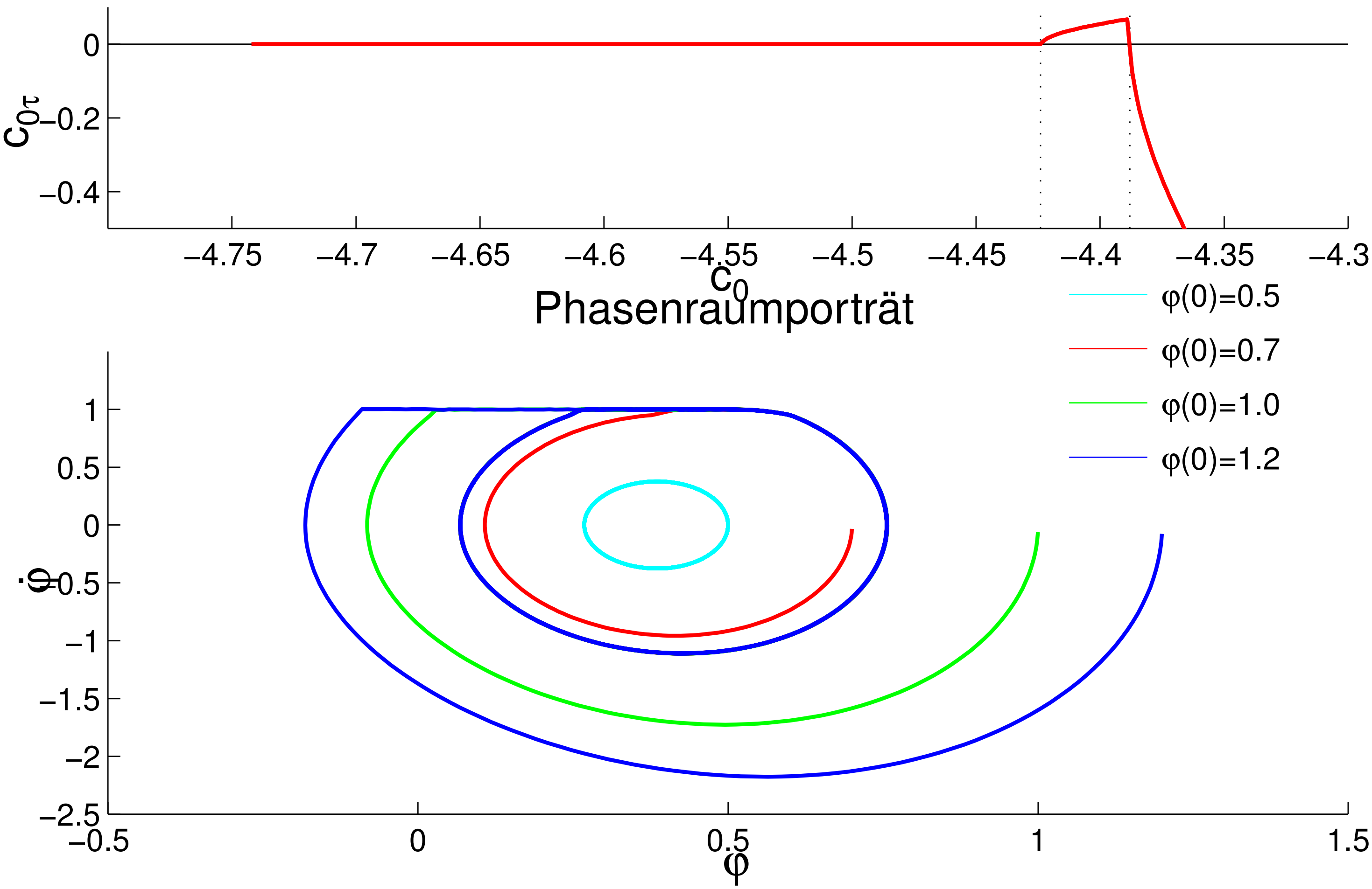
$$\mu(\dot{\varphi}_{rel}) = \begin{cases} \mu_{kin} & \text{if} \quad \dot{\varphi}_{rel} \geq 0 \\ -\mu_{kin} & \text{if} \quad \dot{\varphi}_{rel} < 0 \end{cases}$$





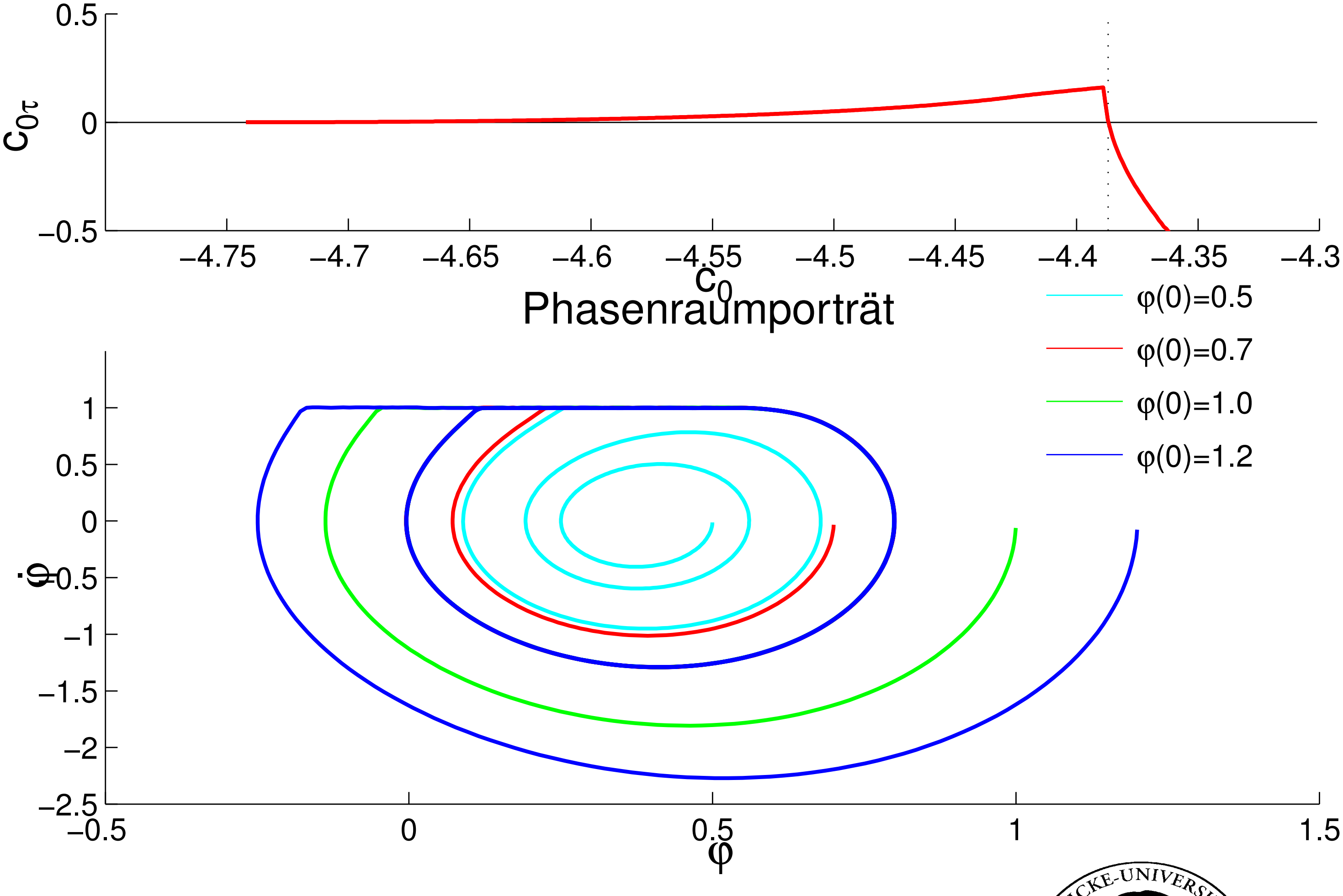
Coulomb + Haftreibungskoeffizient

$$\mu(\dot{\varphi}_{rel}) = \begin{cases} \mu_{kin} & \text{if} \quad \dot{\varphi}_{rel} \geq \mathrm{v}_0 \\ \mu_{stat} & \text{if} \quad 0 \leq \dot{\varphi}_{rel} < \mathrm{v}_0 \\ -\mu_{stat} & \text{if} \quad -\mathrm{v}_0 \leq \dot{\varphi}_{rel} < 0 \\ -\mu_{kin} & \text{if} \quad \dot{\varphi}_{rel} < -\mathrm{v}_0 \end{cases} .$$



Rabinowicz

$$\mu(\dot{\varphi}_{rel}) = \begin{cases} \mu_{kin} \cdot |\dot{\varphi}_{rel}|^{-0.1} & \text{für} \quad \dot{\varphi}_{rel} \geq \mathrm{v}_0 \\ -\mu_{kin} \cdot |\dot{\varphi}_{rel}|^{-0.1} & \text{für} \quad \dot{\varphi}_{rel} < -\mathrm{v}_0 \end{cases}$$



Experiment und Theorie