

Statik und Dynamik von Aufschüttungen

Alexander Schinner

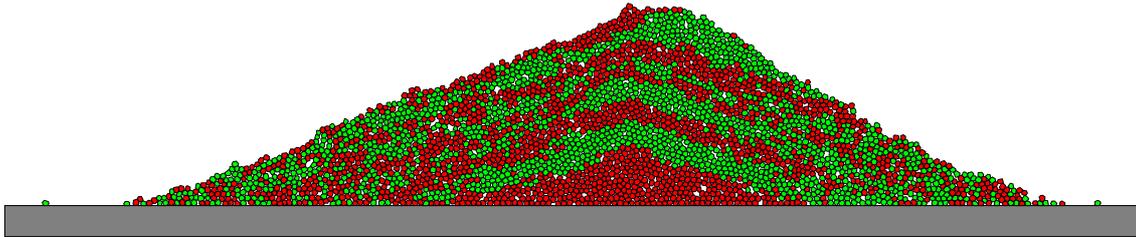


Magdeburg, den 19. Mai 1998

Gliederung

0. Einleitung
1. Experimente
2. Vereinfachte Modelle
3. Simulationen
4. Zusammenfassung

Aufschüttungen

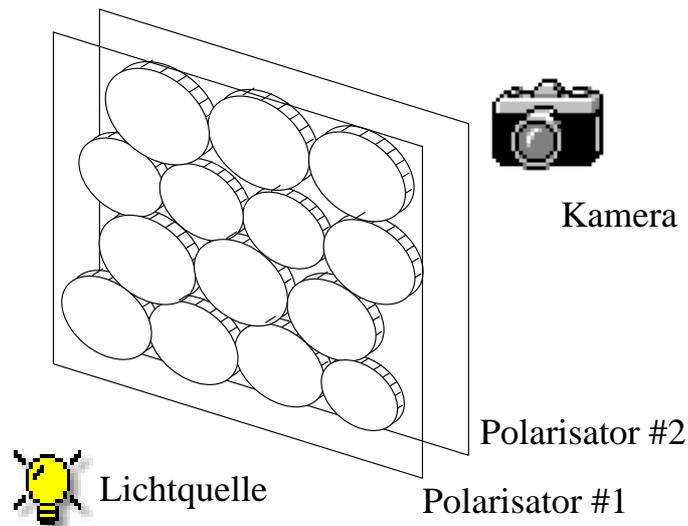


- diskret
- inhomogen
- weit entfernt vom thermischen Gleichgewicht

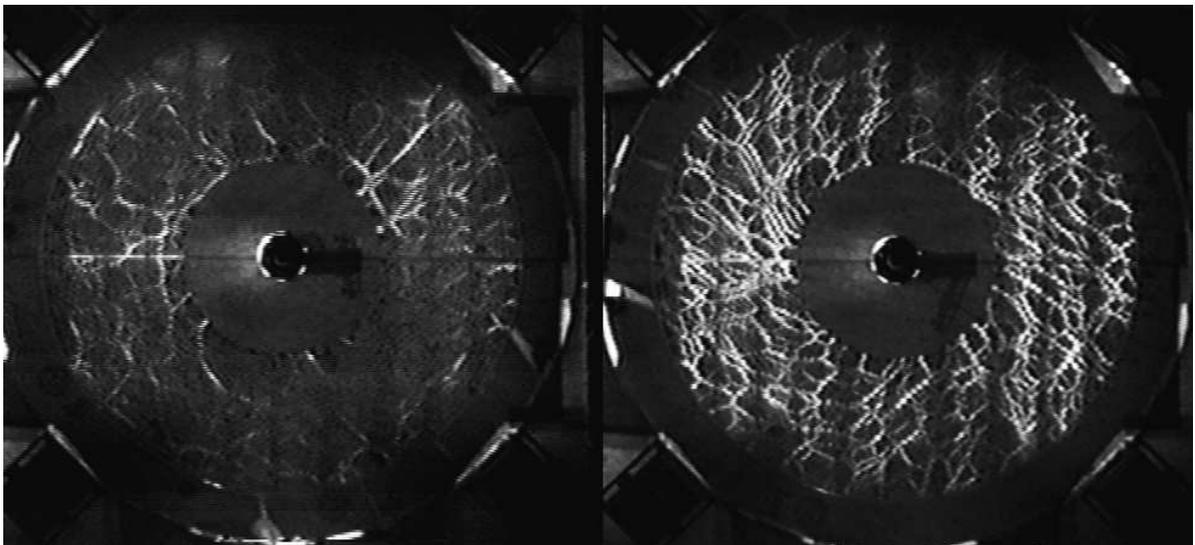


Folgen für das **elastischen** Verhalten?

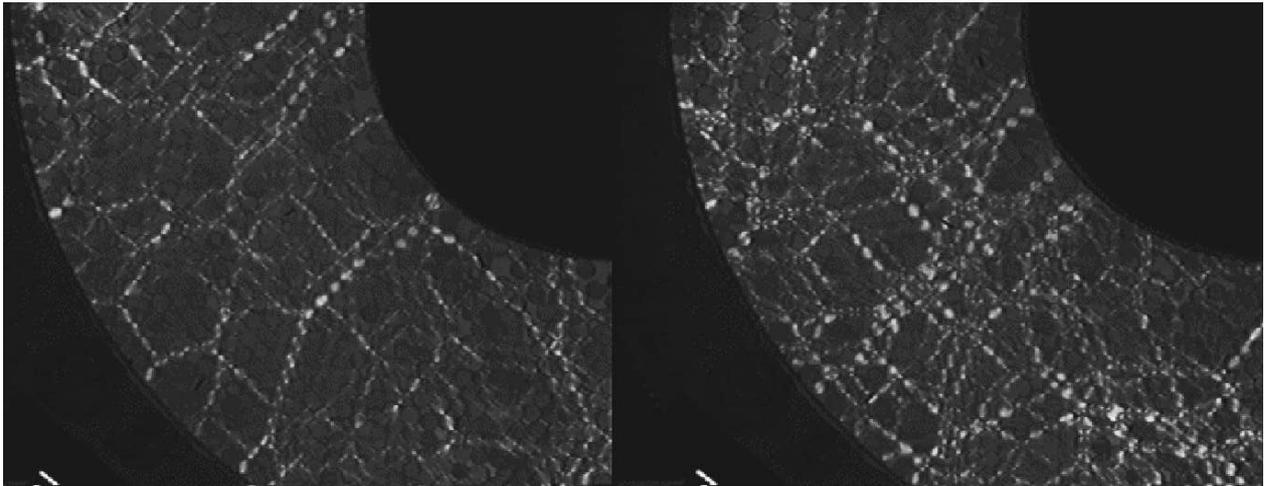
Photoelastizität I



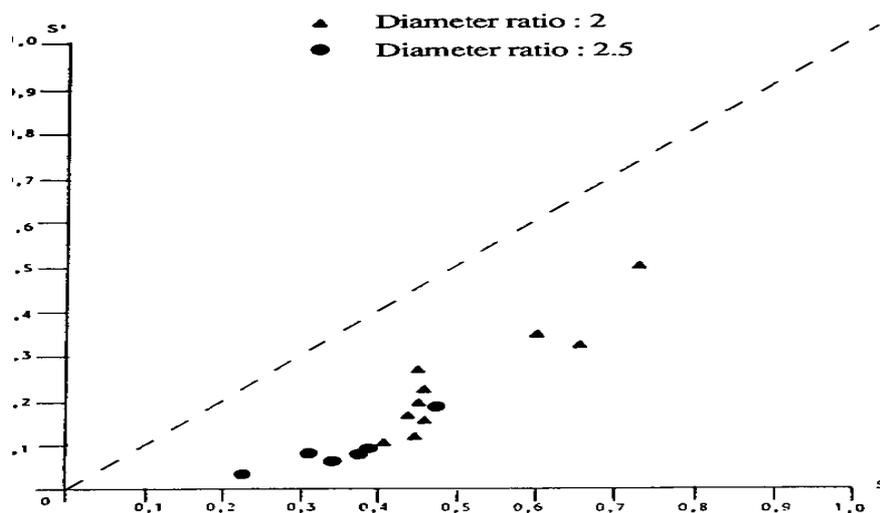
- Darstellung von mechanischen Spannungen
- Aussage über Absolutwerte der Kräfte (noch) nicht möglich



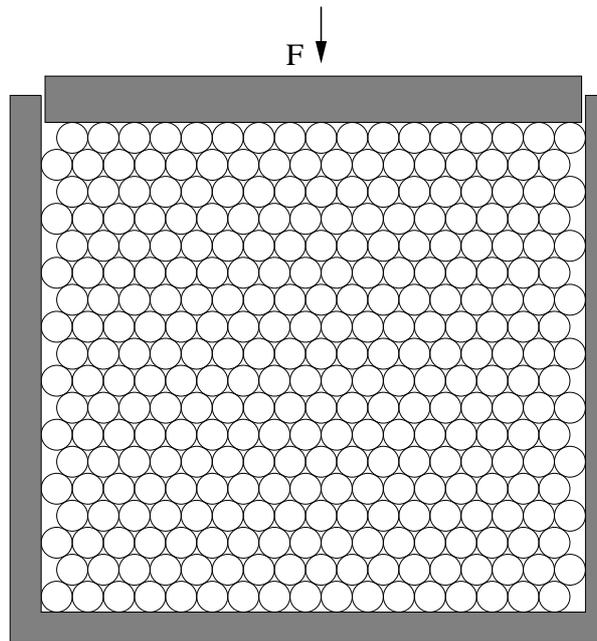
Photoelastizität III



- 50 % der Scheiben "leuchten"
- 15 % der Scheiben tragen die Hauptlast
- Der Hauptteil wird von der äußeren Kraft abgeschirmt
- "Pinning" von Kräften



Einfaches Modell gesucht!



Erwartungen:

1. $F \propto h^m$

2. nach Hertz $m = \frac{3}{2}$

Aber Travers, Bideu et al. finden $m = \frac{7}{2}$.



Wir brauchen das **Kraftnetzwerk**.



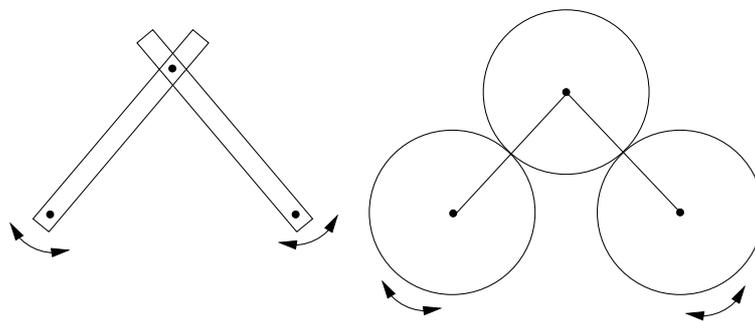
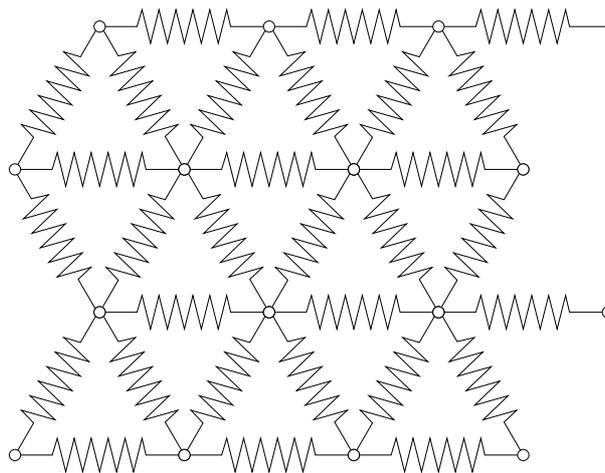
Wir brauchen **Unordnung**.

Einfaches Modell gefunden?

- Ersetzen der Kontakte durch Federn
- regelmäßige Anordnung der Federn
- reibungsfrei
- Federn können sich frei um den Mittelpunkte bewegen



central-force Modell



$$F_{ij} = k[(u_i - u_j)n]n$$

Es werden zufällige Federn entfernt:

- Aufbrechen von Verbindungen
- Ab welchem Anteil $q_c = 1 - p_c$ von gebrochenen Federn ändert sich das Verhalten signifikant?
- Perkulation, Perkulationsschwellen ?!

Steifigkeit Verknüpfungsgrad

$$p_c = 0.642 \qquad p_c = 0.35$$

Der Elastizitätsübergang ist der interessantere!

Kritische Exponenten I

$$\text{Elastizität} \quad E \propto (p - p_c)^\tau$$

$$\text{Korrelationslänge} \quad \xi \propto (p - p_c)^\nu$$

Berücksichtigung der **finite-size** Effekt:

$$E \propto (p - p_c)^\tau \varphi\left(\frac{\xi}{L}\right)$$

2 Grenzfälle:

$$\xi \ll L \quad \varphi\left(\frac{\xi}{L}\right) = \mathcal{O}(x^0)$$

$$\xi \gg L \quad \frac{\partial E}{\partial p} = 0$$

⇓

$$\varphi\left(\frac{\xi}{L}\right) \propto \left(\frac{\xi}{L}\right)^{\frac{\tau}{\nu}}$$

⇓

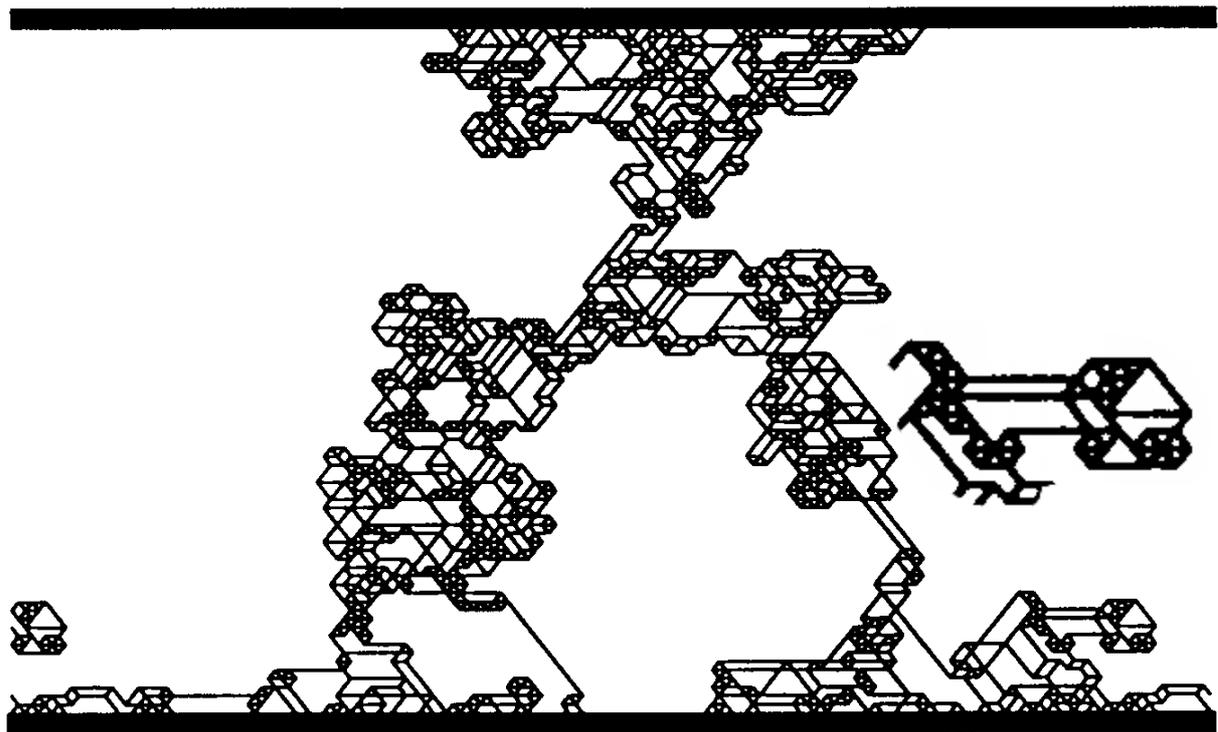
$$E \propto L^{-\frac{\tau}{\nu}}$$

⇓

Die Abhängigkeit von der Systemgröße verschwindet
nicht!

Kritische Exponenten II

- Es existiert **kein** äquivalentes homogenes Medium oder ein repräsentatives Volumenelement.
- Nahe der Schwelle wird das Kraftnetzwerk verschwindend klein.
- Der **Backbone** bildet ein Fraktal mit der Dimension 1.64 ± 0.03 (in 2 Dimensionen)

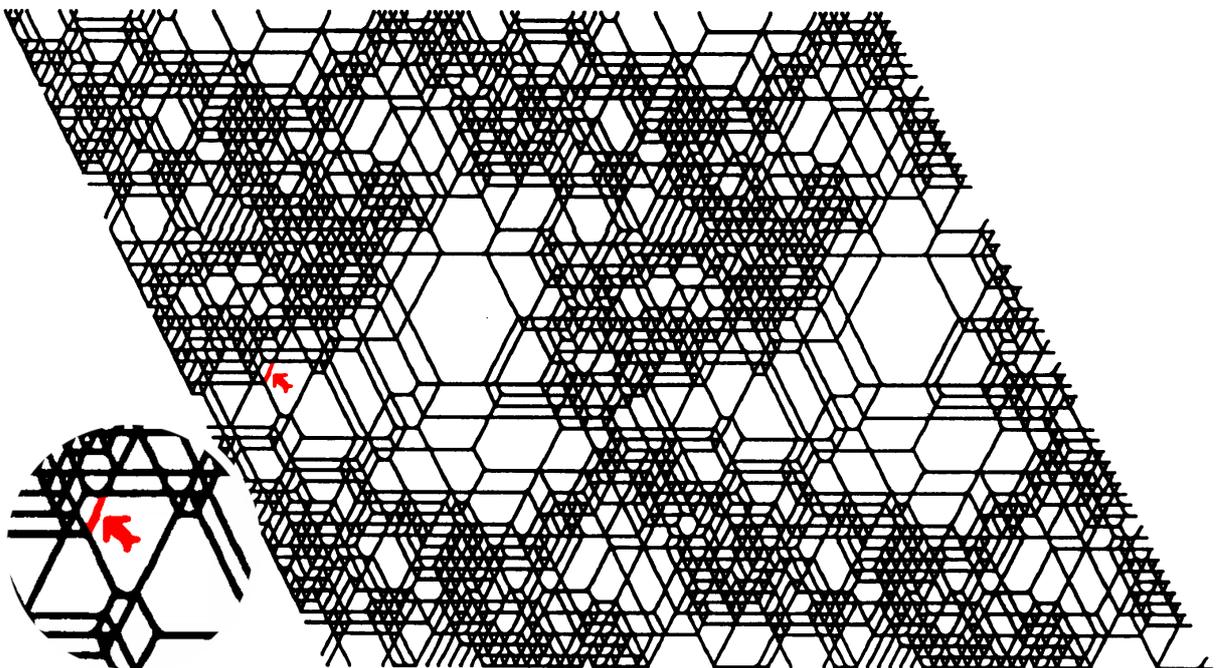


Probleme des Modells

- Zugkräfte sind erlaubt
 - Verdünnung erfolgte zufällig
- ⇒ Phasenübergang 2. Ordnung

Falls

- Zugkräfte **verboten** sind
 - Unbelastete Verbindungen entfernt werden
- ⇒ Phasenübergang 1. Ordnung



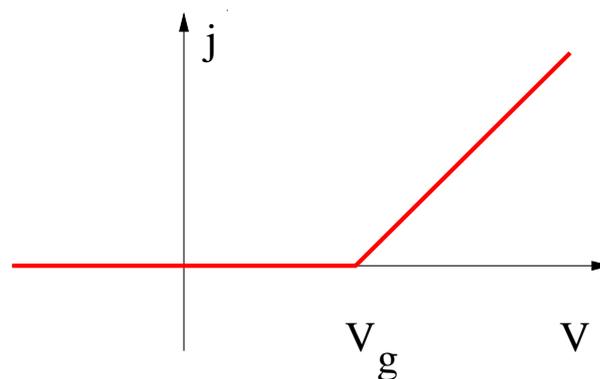
Diodenmodell

Frage: Wie kann ich das Nachlassen des Drucks
einfach simulieren?

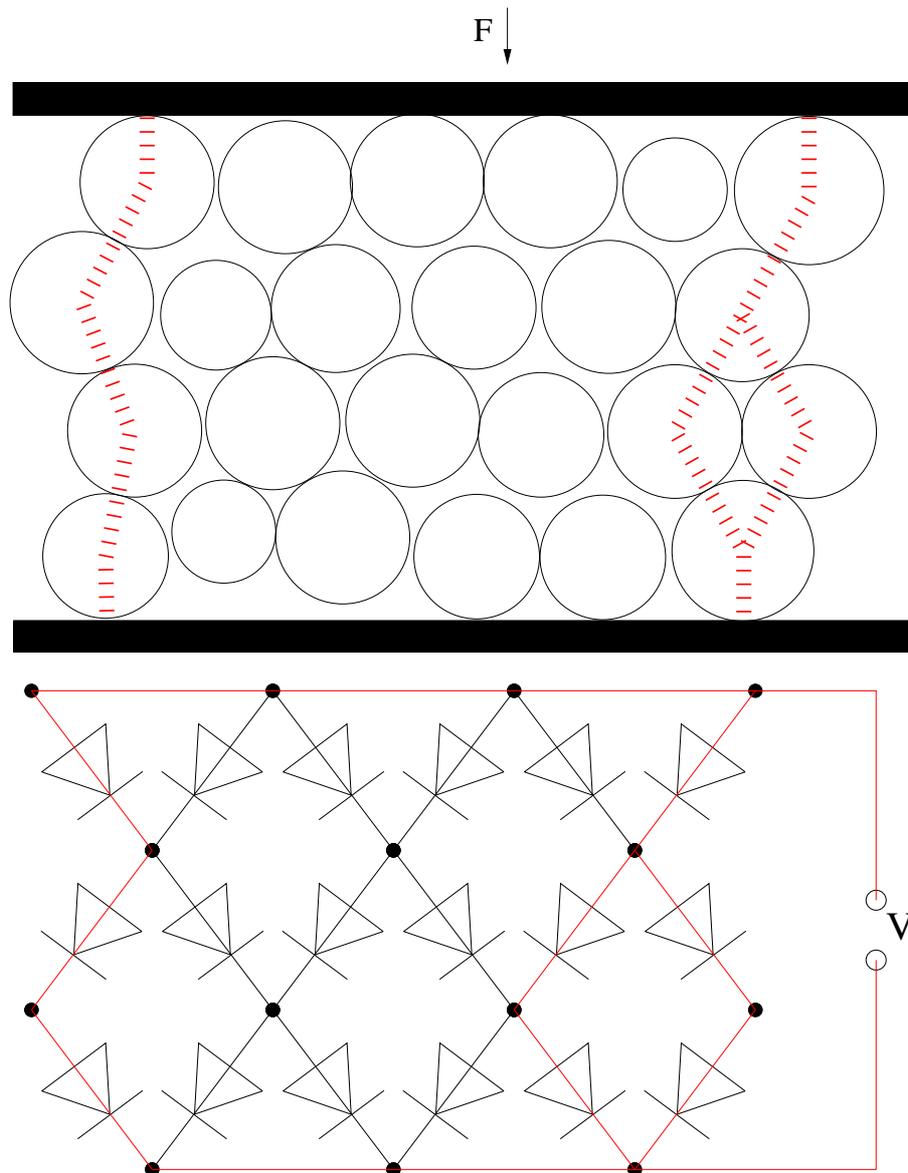
Das Aufbrechen von Verbindungen soll verfolgt
werden:

Hookesches Gesetz	$\hat{=}$	Ohmsches Gesetz
Lamé Gleichung	$\hat{=}$	Laplace-Gleichung
Verschiebung	$\hat{=}$	Spannung
Kraft/elast. Spannung	$\hat{=}$	Strom
V_g	$\hat{=}$	r

$$j = \begin{cases} 0 & v \leq v_g \\ g(v - v_g) & v > v_g \end{cases}$$

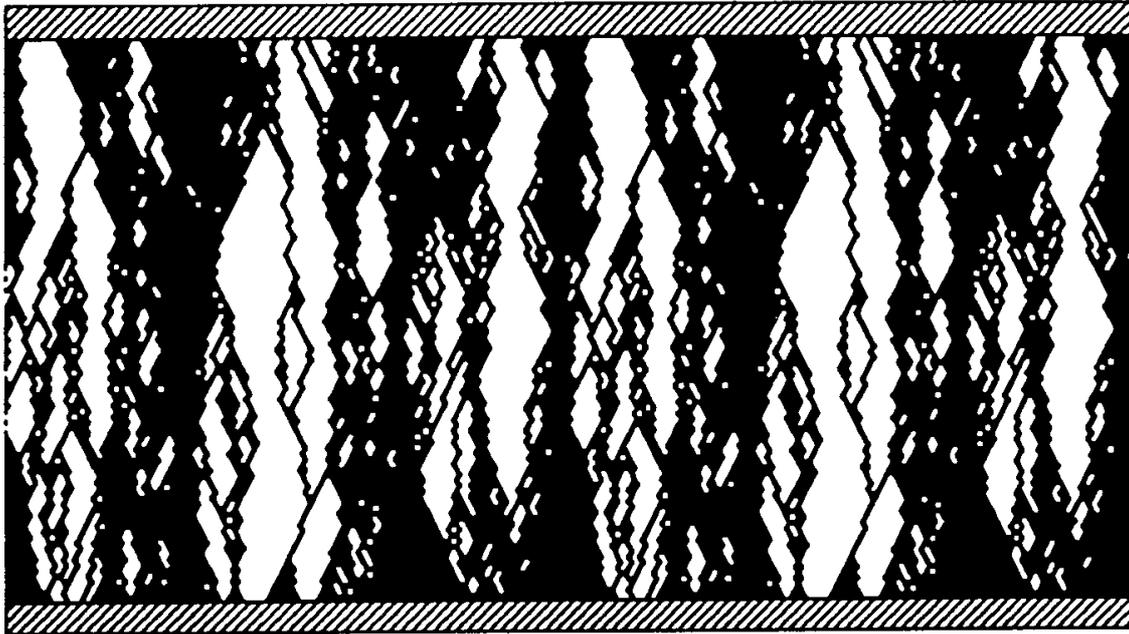


Diodenmodell II



$$V_g = \sum_{i \in P} v_{gi} = \|P\|$$

Diodenmodell III

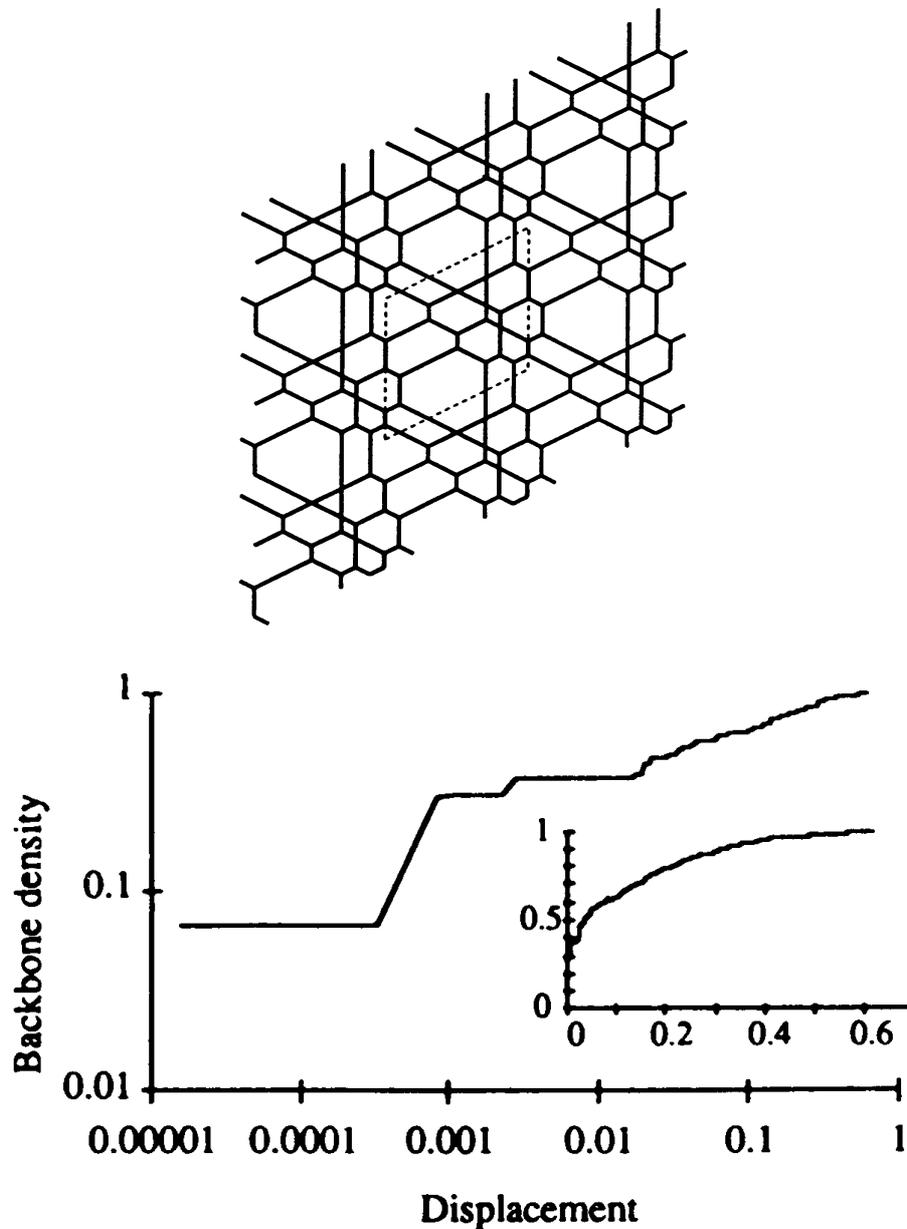


$$\xi_{\parallel} \propto \left(\frac{V - V_g}{L} \right)^{-\nu_{\parallel}} \quad \nu_{\parallel} = \frac{3}{2}$$

$$\xi_{\perp} \propto \left(\frac{V - V_g}{L} \right)^{-\nu_{\perp}} \quad \nu_{\perp} = 1$$

$$\frac{I}{L} \simeq \left(\frac{V - V_g}{L} \right)^2$$

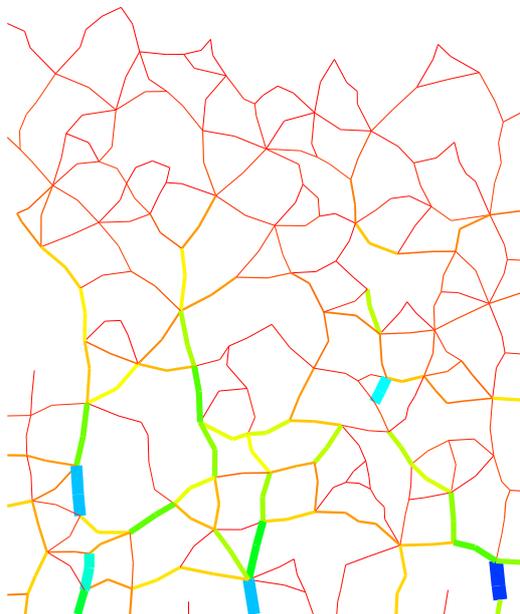
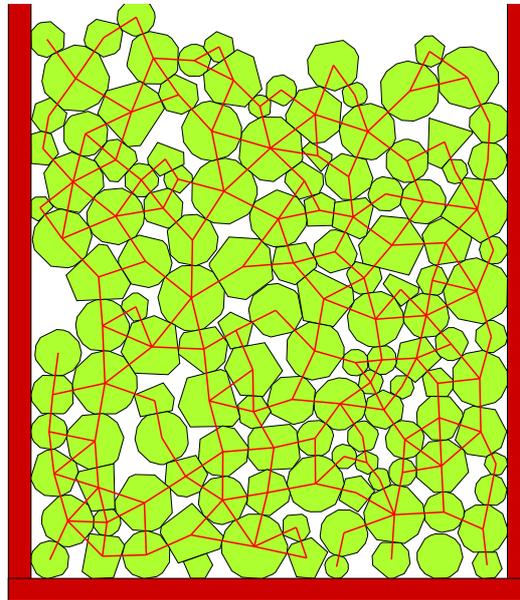
Minimaler Backbone im elastischen Fall



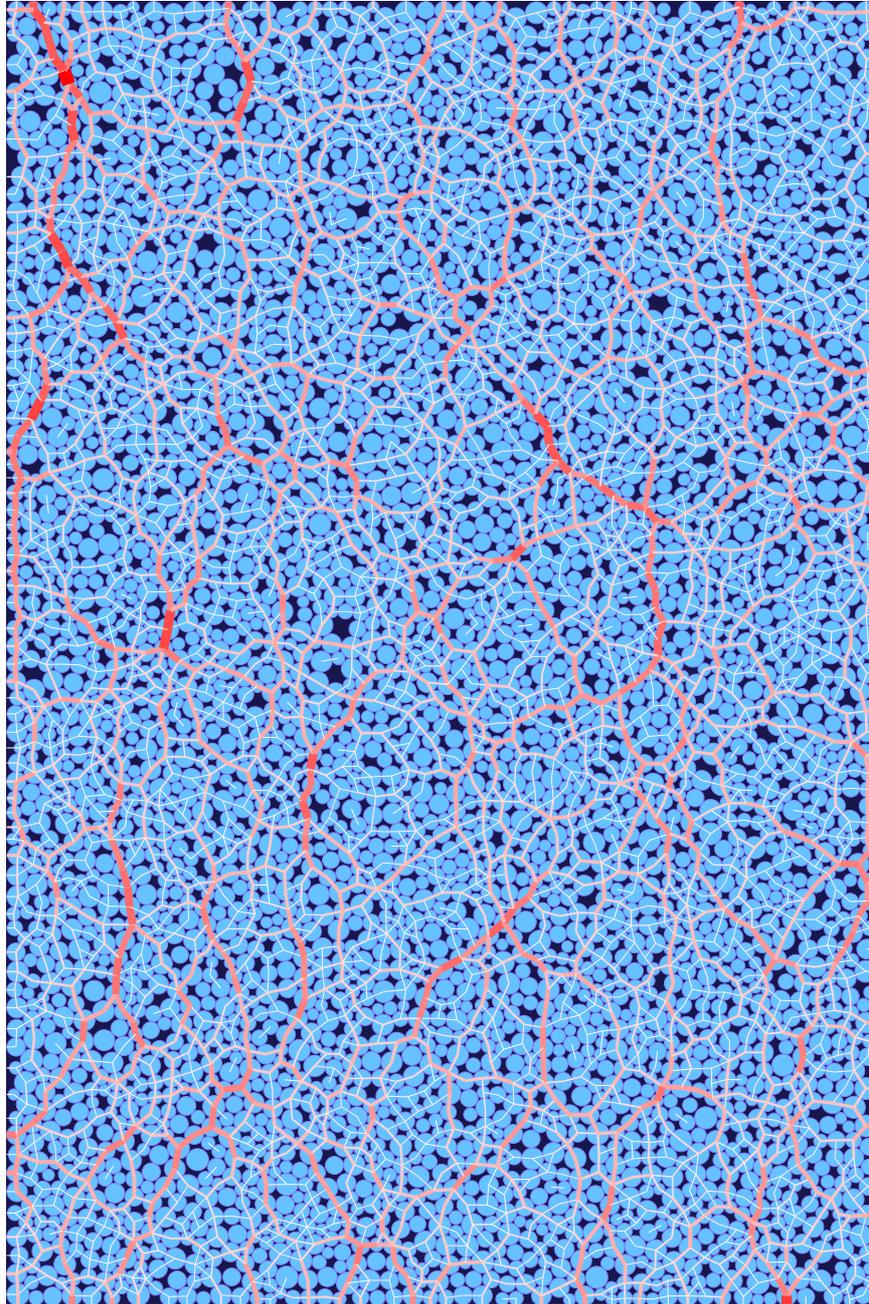
- fraktale Dimension von $\frac{4}{3}$
- $d \propto (U - U_g)^\beta$ mit $d \sim 0.4$

Diskrete Elemente Simulationen

Bisher waren wir immer nahe des kritischen Punktes



Ergebnisse aus der Arbeit von Farhang Radjai



Grundlegendes

- Multikontakte (somit keine ED)
- nichtlineare Kraftgesetze
- nichtstetige Reibung
- diskrete Zeitschritte
- Kontakt-Dynamik nach Moreau

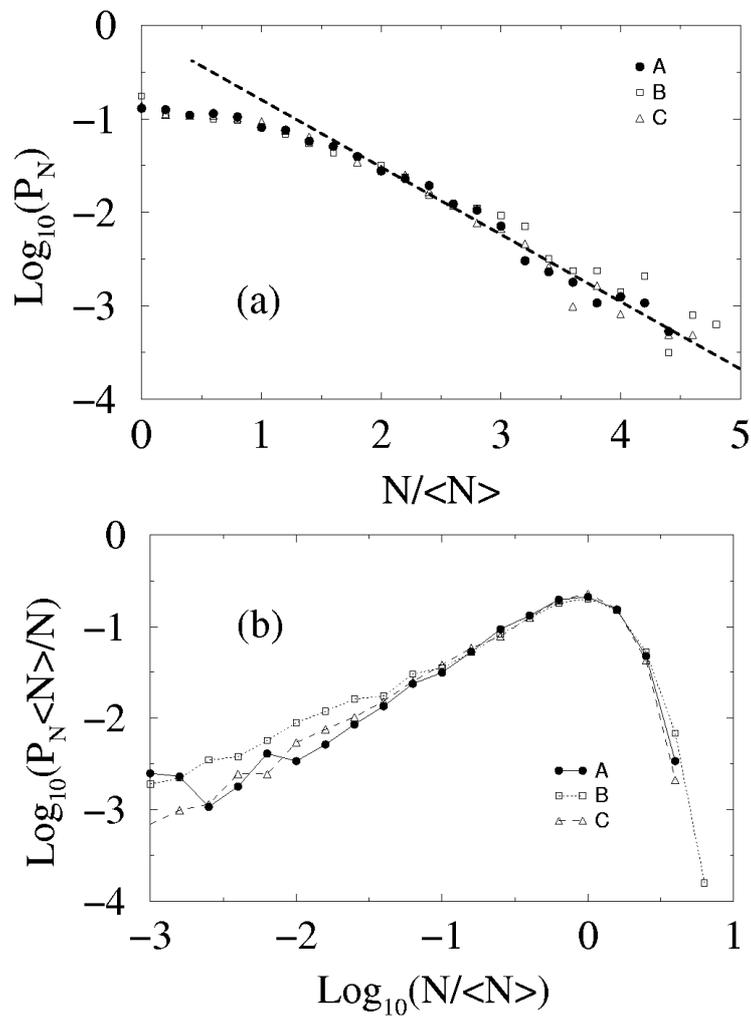


Abhängigkeit des Kraftnetzwerkes von der **Dynamik**
und der **Vorgeschichte**.

Drei Beispiele:

- | | | |
|---|---------------|-------------------------------|
| A | 4012 Teilchen | biaxiale Kompression |
| B | 4025 Teilchen | auf dem Weg ins Gleichgewicht |
| C | 4098 Teilchen | uniaxiale Kompression |

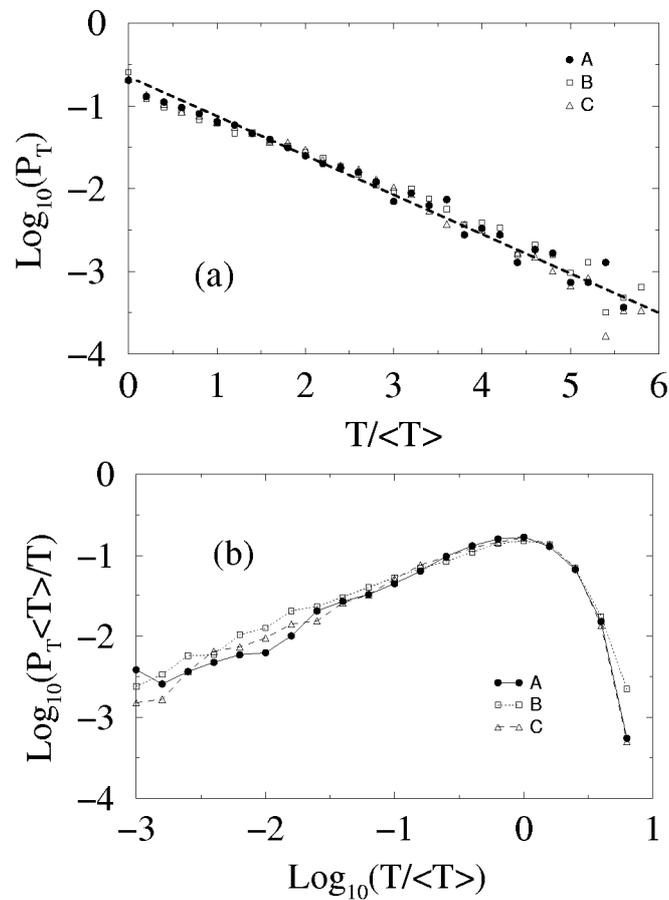
Normalkräfte



$$P_n \propto \begin{cases} \left(\frac{N}{\langle N \rangle}\right)^{-\alpha} & N < \langle N \rangle \\ e^{\beta(1 - \frac{N}{\langle N \rangle})} & N > \langle N \rangle \end{cases}$$

$$\beta^2 = (1 - \alpha)(2 - \alpha) \text{ ist erf\u00fcllt.}$$

Reibungskräfte



$$T_n \propto \begin{cases} \left(\frac{N}{\langle N \rangle} \right)^{-\alpha'} & N < \langle N \rangle \\ e^{\beta' \left(1 - \frac{N}{\langle N \rangle} \right)} & N > \langle N \rangle \end{cases}$$

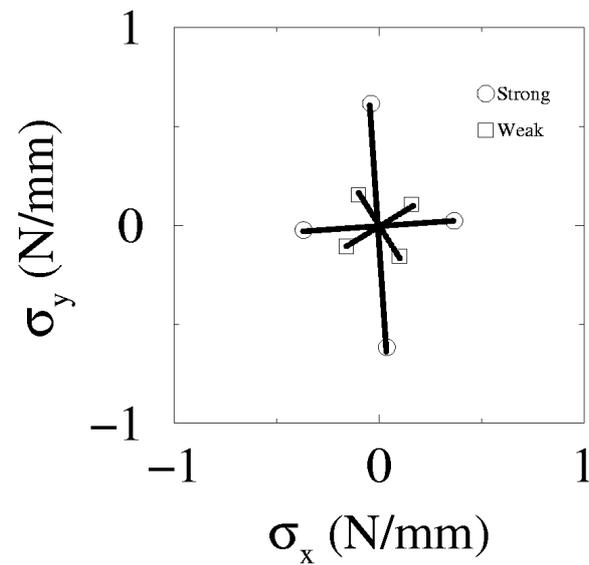
Normalisierung mit $\frac{N}{\langle N \rangle}$ reicht aus.

500-4000 Teilchen \Rightarrow kein Randeffekt

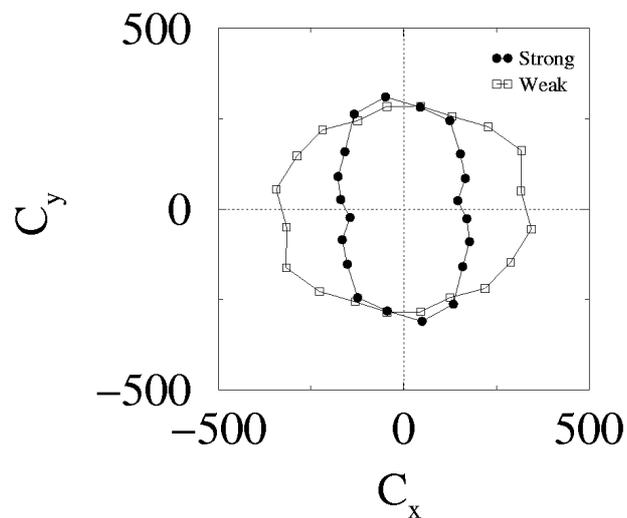
Spannungstensor

Spannungstensors im Probegebiet Ω :

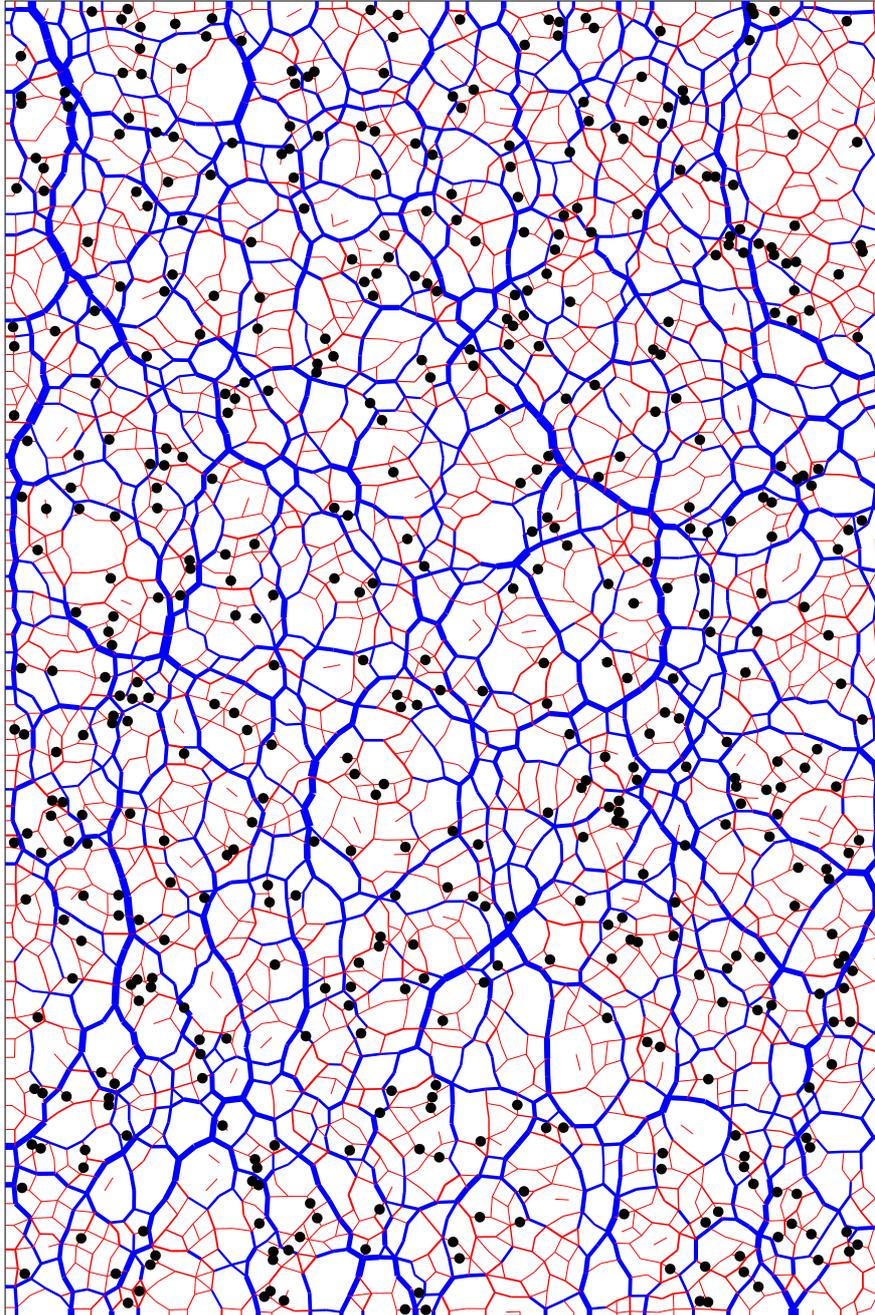
$$\sigma_{ij} = \sum_{c \in \Omega} f_i^c f_j^c$$



Kontaktnormale

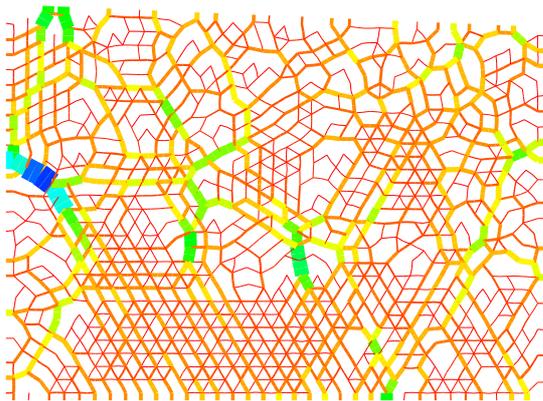


Sliding Contacts

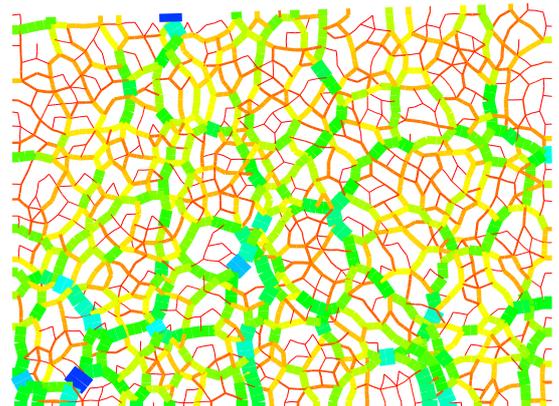


Simulationen mit polygonalen Teilchen

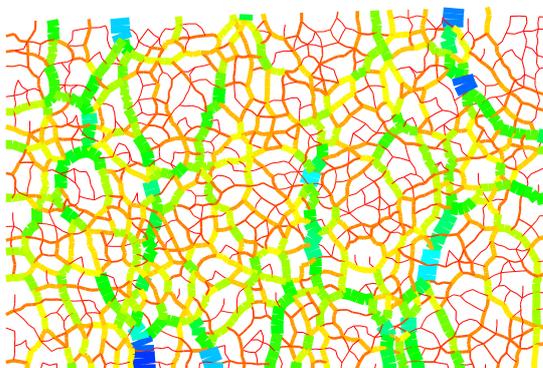
Scheiben, monodispers



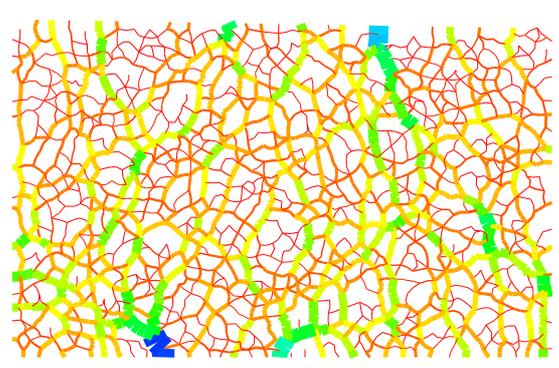
Scheiben, polydispers



Polygone, regelmäßig



Polygone, unregelmäßig



Zusammenfassung

1. Photoelastisches Verhalten als Grundlage für Experimente
2. Federmodell ergibt das Skalenverhalten der Elastizitäten
3. Diodenmodell beschreibt Verhalten nahe des Schwelle
4. DEM Simulationen zeigen das bimodale Kraftnetzwerk